Escola Secundária da Sobreda

Análise Combinatória e Probabilidades

Actividade 4

Os vinte alunos de uma turma de uma escola secundária resolveram formar uma comissão de três de entre eles para organizar um passeio. Quantas comissões diferentes se podem formar?

Resolução
Designemos os vinte alunos pelos números naturais de 1 a 20. O problema proposto pode então ser formulado da seguinte maneira: dado o conjunto {1, 2, 3, ..., 20}, quantos subconjuntos com três elementos se podem formar?
Consideremos um desses subconjuntos: por exemplo, o subconjunto {1, 2, 3}.
Se permutarmos os seus elementos, vamos obter os seguintes arranjos:
(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).
Se fizermos o mesmo para todos os subconjuntos com três elementos, obtemos todos os arranjos dos vinte elementos, tomados três a três. Como cada subconjunto dá origem a seis arranjos (pois 3! = 6), existem seis vezes mais arranjos do que subconjuntos.

Portanto, o número de subconjuntos é $\frac{{}^{20}A_3}{3!} = \frac{20\times 19\times 18}{6} = 1140.$

Podem, assim, ser formadas 1140 comissões.

Definição

*A um subconjunto com k elementos de um conjunto com n elementos, dá-se o nome de **combinação** dos n elementos, tomados k a k.*

Combinação** de **n** objectos, tomados **k** a **k, é um subconjunto $\{a_1 , a_2 , \ldots\ldots\ldots , a_k\}$, onde cada elemento a_i é um dos n objectos.

*O número de **combinações** de n objectos, tomados k a k, representa-se por* ${}^nC_k$

Tem-se que $\quad {}^nC_k = \frac{{}^nA_k}{k!}$

Notas:

1. Atendendo a que ${}^nA_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ vem: ${}^nC_k = \frac{n!}{(n-k)!\times k!}$

2. Note-se que esta fórmula continua válida nos casos em que $k = 0$ e $k = n$.
De facto, tem-se:

${}^nC_0 = 1$ (dado um conjunto com n elementos, só existe um seu subconjunto com 0 elementos: o conjunto vazio) e $\frac{n!}{(n-0)!\times 0!} = 1$ (recorde-se a convenção $0! = 1$).

${}^nC_n = 1$ (dado um conjunto com n elementos, só existe um seu subconjunto com n elementos: o próprio conjunto) e $\frac{n!}{(n-n)!\times n!} = 1.$

Exercícios

1. De um baralho de 52 cartas extraem-se 13 cartas. Diz-se então que se tem uma *mão*.
  a) Quantas *mãos* diferentes existem?
  b) Quantas *mãos* diferentes existem, com o Rei de Copas?
  c) Quantas *mãos* diferentes existem, com dois Ases?
  d) Quantas *mãos* diferentes existem, com duas Copas e três Espadas?
  e) Quantas *mãos* diferentes existem, com dois ou três Reis?
  f) Quantas *mãos* diferentes existem, com pelo menos uma Dama?

2. De quantas maneiras podemos colocar seis ovos num frigorífico com doze lugares para ovos?

3. Um bengaleiro de um cinema tem vinte cabides disponíveis quando chega um grupo de quatro rapazes e três raparigas. Os rapazes trazem chapéus de chuva iguais. As raparigas trazem chapéus de chuva diferentes: um azul, um vermelho e um branco. De quantas maneiras se podem colocar os sete chapéus de chuva no bengaleiro?

4. Queremos colocar doze bolas diferentes em quatro urnas distintas.
De quantas maneiras o podemos fazer, se
  a) não houver restrições?
  b) a primeira urna ficar com exactamente cinco bolas?
  c) a primeira urna ficar com exactamente três bolas e a segunda com exactamente quatro?
  d) as bolas 1 e 2 ficarem sozinhas numa das urnas?
  e) duas urnas ficarem com exactamente quatro bolas cada?

5. No totobola, quantas aposta simples têm exactamente três símbolos 2?

6. Num baile, estão quatro rapazes e quatro raparigas.
  a) Na primeira música dança um único par. De quantas maneiras se pode formar?
  b) Na segunda música dançam dois pares. De quantas maneiras se podem formar?
  c) Na terceira música dançam três pares. De quantas maneiras se podem formar?
  d) Na quarta música dançam quatro pares. De quantas maneiras se podem formar?

7. Num torneio de xadrez, cada jogador jogou uma partida com cada um dos outros jogadores. Sabendo que foram disputadas 120 partidas, quantos jogadores participaram no torneio?

8. Num concurso foram premiados dez alunos, dois dos quais são irmãos. Desses dez, será escolhida uma equipa de quatro para ir a Londres.
Sabendo que não vão os dois irmãos simultaneamente, quantas equipas diferentes podem escolher-se?

9. Um painel é formado por seis rectângulos, como a fgura mostra.

De quantos modos diferentes se pode pintar o painel, sabendo que dois quaisquer dos rectângulos têm que ser brancos e os quatro restantes de cores diferentes, escolhidas entre amarelo, preto, verde, rosa e vermelho?

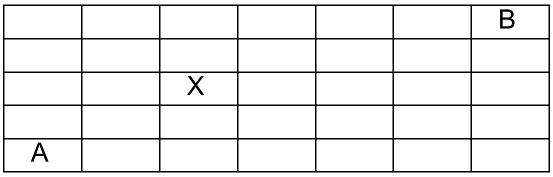
10. Determine o número máximo e o número mínimo de rectas que poderão ser definidas por 12 pontos distintos, dos quais há pelo menos 5 colineares.

11. Num autocarro viajam 12 homens e 6 mulheres.
Determine de quantas maneiras se pode organizar um grupo com 6 dessas pessoas, de forma que pelo menos duas delas, mas não mais que quatro, sejam homens.

12. Quantos números de nove algarismos podemos formar com três algarismos iguais a 1, dois algarismos iguais a 3 e quatro algarismos iguais a 5 ?

13. De quantas maneiras se podem colocar nove bolas diferentes em três urnas distintas, de modo que na primeira urna fiquem três bolas, na segunda duas e na terceira quatro?

14. Observa a figura



a) De quantas maneiras poderemos ir da casa A até à casa B, se nos movermos sempre ou uma casa para a direita ou uma casa para cima? (Sugestão: um caminho de A para B pode ser visto como uma sequência de dez letras, quatro C e seis D, onde C significa cima e D signfica direita.)

b) De quantas maneiras, se devemos passar pela casa X?

c) De quantas maneiras, sem passar por nenhuma casa da última coluna (excepto B, naturalmente)?

d) De quantas maneiras, passando por uma só casa da segunda linha?

- As questões 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 e 24 são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.

15. Um frigorífico tem cinco prateleiras.

Pretende-se guardar, nesse frigorífico, um iogurte, um chocolate e um queijo.

De quantas maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas?

(A) ${}^{5}C_3$ **(B)** ${}^{5}A_3$ **(C)** 5^3 **(D)** 3^5

16. No bar de uma escola estão à venda cinco tipos de pastéis (laranja, feijão, nata, coco e amêndoa) .

Quatro amigos, João, Maria, Paulo e Rui, decidem comer um pastel cada um.

O João escolhe pastel de laranja ou de feijão. A Maria não escolhe pastel de nata.

De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os pastéis?

(A) ${}^{5}C_4$ **(B)** 5^2+4+2 **(C)** $5^2 \times 4 \times 2$ **(D)** ${}^{5}A_4$

17. Considere todos os números pares com cinco algarismos. Quantos destes números têm quatro algarismos ímpares?

(A) $5 \times {}^{5}C_4$ **(B)** 5^5 **(C)** $5!$ **(D)** $5 \times {}^{5}A_4$

18. Foram oferecidos dez bilhetes para uma peça de teatro a uma turma com doze rapazes e oito raparigas.
Ficou decidido que o grupo que vai ao teatro é formado por cinco rapazes e cinco raparigas.
De quantas maneiras diferentes se pode formar este grupo?

(A) ${}^{12}C_5 \times {}^{8}C_5$ **(B)** ${}^{12}A_5 \times {}^{8}A_5$

(C) $12 \times 8 \times 5^2$ **(D)** $\frac{12! \times 8!}{5!}$

19. Numa turma com 25 alunos, vão ser escolhidos 3 alunos para organizar um baile.
A Joana é aluna da turma.
Quantas comissões se podem formar nas quais a Joana seja um dos elementos?

(A) 1 **(B)** 276 **(C)** 356 **(D)** 552

20. Uma estante tem oito prateleiras. Pretende-se expor, nessa estante, seis peças de porcelana: duas jarras iguais e quatro pratos diferentes.
De quantas maneiras podem ser expostas as seis peças nas oito prateleiras, de tal modo que não fique mais do que uma peça em cada prateleira?

(A) ${}^{8}C_2 \times {}^{6}A_4$ **(B)** ${}^{8}A_2 \times 4!$

(C) ${}^{8}C_2 \times {}^{8}A_4$ **(D)** ${}^{8}A_2 \times {}^{6}C_4$

21. Num curso superior existem dez disciplinas de índole literária, das quais três são de literatura contemporânea.

Um estudante pretende inscrever-se em seis disciplinas desse curso.

Quantas escolhas pode ele fazer se tiver de se inscrever em, pelo menos, duas disciplinas de literatura contemporânea?

(A) ${}^{3}C_2 + {}^{7}C_4 \times {}^{7}C_3$ **(B)** ${}^{3}C_2 + {}^{7}C_4 + {}^{7}C_3$

(C) ${}^{3}C_2 \times {}^{7}C_4 \times {}^{7}C_3$ **(D)** ${}^{3}C_2 \times {}^{7}C_4 + {}^{7}C_3$

22. Numa turma com doze raparigas e sete rapazes, vão ser escolhidos cinco elementos para formar uma comissão.

Pretende-se que essa comissão seja constituída por alunos **dos dois sexos**, mas tenha mais raparigas do que rapazes.

Nestas condições, quantas comissões diferentes se podem formar?

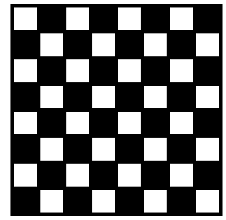
(A) ${}^{19}C_5 \times {}^{5}C_3 + {}^{19}C_5 \times {}^{5}C_2$ **(B)** ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{8}C_3 \times {}^{6}C_2$

(C) ${}^{19}C_{12} \times {}^{12}C_3 + {}^{19}C_7 \times {}^{7}C_2$ **(D)** ${}^{12}C_4 \times {}^{7}C_1 + {}^{12}C_3 \times {}^{7}C_2$

23. Num torneio de xadrez, cada jogador jogou uma partida com cada um dos outros jogadores.
Supondo que participaram no torneio dez jogadores, o número de partidas disputadas foi

(A) ${}^{10}C_2$ **(B)** ${}^{10}C_9$ **(C)** $10!$ **(D)** 10×9

24. Admita que tem à sua frente um tabuleiro de xadrez, no qual pretende colocar os dois cavalos brancos, de tal modo que fiquem na mesma fila horizontal.
De quantas maneiras diferentes pode colocar os dois cavalos no tabuleiro, respeitando a condição indicada?



(A) $8 \times {}^{8}C_2$ **(B)** ${}^{64}C_2$ **(C)** $\dfrac{{}^{64}C_2}{8}$ **(D)** ${}^{8}A_2$

25. Considere o seguinte problema:
Utilizando os cinco algarismos do número $41\,123$*, quantos números podem ser formados?*

${}^{5}C_2 \times 3!$ e ${}^{5}A_3$ são duas respostas correctas.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique o raciocínio que conduziu a cada uma dessas respostas.